موضوع الرياضيات لشعبة تقني رياضي بكالوريا 2011

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2011

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــــوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: (E) ...... $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقاط A، B، C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\sqrt{3}-i$ ، نضع: $L=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أ) اكتب L على الشكل الأسي.

ب) أثبت أن: $z_A-z_B=L(z_C-z_B)$ ، ثم استنتج أن A صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد عناصره المميزة.

ج) استنتج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته S.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{a+b\ln 2x}{4x^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ عيّن a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ للمنحنى (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.

2/ g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}$ و (C_g) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$.

د) أنشئ (C_g).

3/ أ) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\frac{1+\ln 2x}{2x}$. احسب $h'(x)$.

ب) تحقّق أن: $g(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n = 1 + \dfrac{1}{n(n+2)}$، ثم استنتج أن: $u_n > 1$

2/ ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة ، احسب نهاية (u_n).

3/ ليكن الجداء p_n المعرف كما يلي: $p_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $p_n = \dfrac{2n+2}{n+2}$.

4/ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = \ln u_n$ حيث $\ln$ دالة اللوغاريتم النيبيري

عبّر بدلالة p_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$

التمرين الرابع: (05 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ المعادلة: $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

2/ في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون: $\overline{5413} = \overline{3421} + \overline{1562}$

3/ باقي القسمة الإقليدية للعدد: $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2011}$ على 7 هو: 6

4/ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

أ- المستوي (ρ) الذي معادلته $2x + y - z + 1 = 0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2;1;-1)$ و $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيهه لا يشتركان في أية نقطة.

ب- معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (ρ) هي: $x - y + z = 0$.

الموضـــوع الثانـــي

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:

$\overrightarrow{AD}(1;5;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(0;7;3)$ ، $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$ و $C(2;8;-4)$

1/ بيّن أن النقط A ، B ، D تعيّن مستويا.

2/ بيّن أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD)

3/ I المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

أ) بيّن أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDI)

ب) عيّن معادلة للمستوي (CDI) واكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ج) استنتج إحداثيات النقطة I

4/ احسب الأطوال DI ، CD ، AB واستنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$

(مساحة رباعي الوجوه = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

L العدد المركب المعرف كما يلي: $L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$.

1/ أ) اكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

ب) بيّن أن: $L^{12}+1=0$ ، ثم احسب: $\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+\left(5+3i\right)^{12}$.

ج) n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي أثبت أن: $L^{4n}+L^{4p}=0$.

2/ أ) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$ عيّن اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

ب) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

التمرين الثالث: (07.5 نقطة)

أ) f الدّالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=3-\frac{4}{e^x+1}$$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة f.

2- عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

3- بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس (C_f) عندها.

4- لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

أ- ادرس تغيّرات الدّالة g.

ب- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7<\alpha<2,8$

5- أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$ والمنحنى (C_f).

ب) (U_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $U_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$

1- باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل.

2- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n فإن: $1\leqslant U_n<\alpha$.

3- بيّن أنّ المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4- استنتج أن (U_n) متقاربة و بيّن أنّ: $\lim_{n\to+\infty} U_n=\alpha$.

التمرين الرابع: (04 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$

1) تحقّق أن: $-3\equiv 4[7]$ ثم بيّن أن: $A_3\equiv 6[7]$.

2) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7.

3) بيّن أنه إذا كان n فرديا فإن: A_n+1 يقبل القسمة على 7 واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

4) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7؟

التصحيح الرسمي لموضوع الرياضيات شعبة تقني رياضي بكالوريا 2011

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2011

المادة : رياضيات   الشعبة: تقني رياضي

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	الموضوع الأول		
الشكل الأسي للعدد المركب الدوران	**التمرين الأول: (04 نقاط)**		
	1/ حلول المعادلة (E) : $z_1=\sqrt{3}-i$ ، $z_2=\sqrt{3}+i$	$0,25\times 2$	
	$z_1=2\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right]$ و $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	$0,5\times 2$	
	2) أ) $L=e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$0,5$	04
	ب) إثبات أن $z_A-z_B=L(z_C-z_B)$ ومنه A صورة C بالدوران الذي مركزه النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}+i$ وقيس زاويته $\frac{4\pi}{3}$	$0,25\times 3$	
	ج) المثلث ABC مثلث متقايس الساقين $AB=BC$ مساحته s حيث	$0,5$	
	$s=\frac{1}{2}AC\times BH=\sqrt{3}ua$ حيث H منتصف $[AC]$	$0,75$	
دراسة الدالة اللوغارتمية الدوال الأصلية	**التمرين الثاني: (06 نقاط)**		
	1/ من $f(\frac{1}{2})=1$ نجد $a=1$ ثم من $f'(\frac{1}{2})=0$ نجد : $b=2$	$0,5\times 2$	
	2/ أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$	$0,25+0.5$	
	(d_1) : $y=0$ و (d_2) : $x=0$ مستقيمان مقاربان لـ (C_f)	0.25×2	
	ب) $g'(x)=\frac{-\ln 2x}{x^3}$ وإشارته: 0 + $\frac{1}{2}$ - $+\infty$	$0,5+0.25$	06
	g متزايدة تماما على $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$	$0,25$	
	جدول التغيرات: x: 0 ، $\frac{1}{2}$ ، $+\infty$ — $g'(x)$: + ، - — $g(x)$: $-\infty$ ↗ 1 ↘ 0	$0,25$	
	ج) $g(x)=0$ تكافئ $x=\frac{\sqrt{e}}{2e}$	$0,5$	
	د) إنشاء (C_g)	$0,5$	
	3/ أ) $h'(x)=-\frac{\ln 2x}{2x}$	$0,5$	
	ب)التحقق $g(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم $G(x)=-\frac{3+2\ln 2x}{4x}$	$0,75+0.25$	

156

<table>
<tr><th rowspan="2">محاور الموضوع</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأول)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموع</th></tr>
<tr><td>اتجاه تغير متتالية
البرهان بالتراجع
نهاية متتالية</td><td>التمرين الثالث: (05 نقاط)
1/ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، $u_n > 1$
2/ $u_n = f(n)$ حيث: $f(x) = 1 + \frac{1}{x(x+2)}$ ، $f'(x) = -\frac{2x+2}{x^2(x+2)^2} < 0$ من أجل $x > 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$
(u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة ، $\lim_{x\to+\infty} u_n = 1$
3/ البرهان بالتراجع أن: $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$
من أجل : $n = 1$ ، $p_1 = u_1 = \frac{4}{3}$
نفرض $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$ ولدينا : $p_{n+1} = p_n \times u_{n+1} = \frac{2n+4}{n+3}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$
4/ $s_n = \ln p_n$ ، $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln 2$</td><td>0.5×2
1
0.5×2
0.25
0.75
0.5×2</td><td>05</td></tr>
<tr><td>التعداد الموافقة القواسم
هندسة فضائية</td><td>التمرين الرابع: (05 نقاط)
1/ صحيح لأن: $PGCD(21;14) = 7$ و 7 لا يقسم 40
2/ خطأ لأن: $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5313}$
3/خطأ لأن: $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2011} = \frac{3^{2012}-1}{2}$ و $3^{6k+\alpha} \equiv 3^{\alpha}[7]$
حيث $\alpha \in \{0,1,2,3,4,5\}$ و $2012 = 6\times335+2$ ومنه $\frac{3^{6k+2}-1}{2} \equiv 4[7]$
4/ أ) صحيح لأن: $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{u}$ شعاع توجيه (d) متعامدان وعليه $(P)//(d)$ و $A \notin (P)$ و $A \in (d)$ إذن $(P)\cap(d) = \varnothing$
ب) خطأ لأن: معادلة (Q) هي : $2x + y - z = 0$
<u>ملاحظة:</u> في كل سؤال تمنح 0.25 للاختيار الصحيح والباقي للتبرير.</td><td>1
1
0.5×3
1
0.5</td><td>05</td></tr>
</table>

157

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	الموضوع الثاني		
تطبيقات الجداء السلمي التمثيل الوسيطي لمستقيم الحجوم	**التمرين الأول: (04.5 نقطة)**		4.5
	1/ $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير متوازيين فالنقاط A، B، D تعين مستويا	0,25×3	
	2/ بما أن $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BD}=0$ و $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=0$ فإن: (CD) يعامد (ABD)	1	
	3/ أ) (CD) عمودي على (AB) و (CI) عمودي على (AB) ومنه (AB) يعامد (CDI)	0.5	
	ب) $\overrightarrow{AB}(1,-2;-1)$ ناظم للمستوي (CDI) و C نقطة منه فإن المعادلة الديكارتية هي: $x-2y-z+10=0$ ، التمثيل الوسيطي لـ (AB) $\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$	0,5×2	
	جـ) $I\left(\frac{1}{6};\frac{11}{3};\frac{17}{6}\right)$	0,5	
	4/ $DI=\frac{\sqrt{354}}{6}$ ، $CD=\sqrt{59}$ ، $AB=\sqrt{6}$	0.25×3	
الشكل المثلثي ، موافق ، التشابه	**التمرين الثاني: (04 نقاط)**		04
	1/ أ) $L=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{3\pi}{4}}$	0.5×2	
	ب) لدينا $L^{12}=-1$ ومنه $L^{12}+1=0$ و $\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+\left(5+3i\right)^{12}=0$	0.5×2	
	جـ) $L^{4n}+L^{4p}=\left(-1\right)^{n}+\left(-1\right)^{p}=0$	0.75	
	2/ أ) $z_{A'}=-1-9i$	0.75	
	ب) $z_{G}=3-3i$	0.5	
	التمرين الثالث: (07.5 نقطة)		7.5
	1- أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.	0.25×2	
	- المشتق و إشارته : $f'(x)=\frac{4e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}>0$	0.25×2	
	- جدول التغيرات: x: $-\infty$ … $+\infty$ ؛ $f'(x)$: $+$ ؛ $f(x)$: -1 ↗ 3	0.25	
	2) - المستقيمان المقاربان معادلتاهما $y=-1$ ، $y=3$	0,25×2	

158

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
الدوال العددية والمتتاليات	3) $f''(x)=\frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ ، إشارته : $+$ 0 $-$	0.5	
	نقطة الانعطاف $\omega(0,1)$	0.25	
	معادلة المماس: $y=x+1$	0.25	
	4) أ- تغيرات g : $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$	0.25×2	
	المشتق : $g'(x)=-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ وهو سالب	0.25	
	جدول التغيرات $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & 0 & - & \\ \hline g(x) & +\infty & & \searrow & & -\infty \end{array}$	0.25	
	ب- g مستمرة ومتناقصة تماما على $[2,7;2,8]$ ، $g(2,7)\simeq 0,048$	0.25	
	$g(2,8)\simeq -0,029$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد حيث $g(\alpha)=0$ و $2,7<\alpha<2,8$	0.25×2	
	5) أ- $f(x)=0$ تكافئ $x=-\ln 3$	0.25	
	ب- رسم C_f و المنصف الأول والمماس.	0.75	
	ب) 1- تمثيل : U_0 ، U_1 ، U_2	0.5	
	2- إثبات أن : $1\leqslant U_n<\alpha$ $1\leqslant U_0<\alpha$ لأن $U_0=1$ و $2,7<\alpha<2,8$ نفرض $1\leqslant U_n<\alpha$ و f متزايد تماما ومنه $f(1)\leq f(U_n)<f(\alpha)$ ومنه $1\leqslant U_{n+1}<\alpha$ $(f(1)>1)$ ومنه $1\leqslant U_n<\alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n	0.75	
	3- المتتالية (U_n) متزايدة تماما : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=g(u_n)>0$ لأن $1\leqslant U_n<\alpha$	0.25	
	4- (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} U_n=\alpha$	0.25×2	
الموافقات في Z	**التمرين الرابع: (04 نقاط)**		04
	1) $4\equiv-3[7]$	0.25	
	$A_3\equiv 2^3+3^3+(-3)^3+(-2)^3+(-1)^3[7]$ أي $A_3\equiv-1[7]$ ومنه $A_3\equiv 6[7]$	0.5	
	2) $2^{3k}\equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$	0.75	
	$3^{6k}\equiv 1[7]$ ، $3^{6k+1}\equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $3^{6k+4}\equiv 4[7]$ ، $3^{6k+5}\equiv 5[7]$	0.75	
	3) $A_n\equiv 2^n+3^n+(-3)^n+(-2)^n+(-1)^n[7]$ ، إذا كان n فرديا فإن : $A_n\equiv-1[7]$	0.75	
	ومنه A_n+1 يقبل القسمة على 7 ، $A_{2011}\equiv 6[7]$ الباقي هو 6	0.25	
	4) $A_{1432}\equiv 2\times 2^{3\times 477+1}+2\times 3^{6\times 238+4}+1[7]$ ومنه $A_{1432}\equiv 6[7]$	0.75	

159